Università degli Studi dell'Aquila

Dipartimento di Ingegneria e Scienze dell'Informazione e Matematica

Università degli Studi dell'Aquila

Corso di Algoritmi e Strutture Dati con Laboratorio

Alberi bilanciati

(rif. Algoritmi in Java, di R. Sedgewick)

Prestazioni dei BST

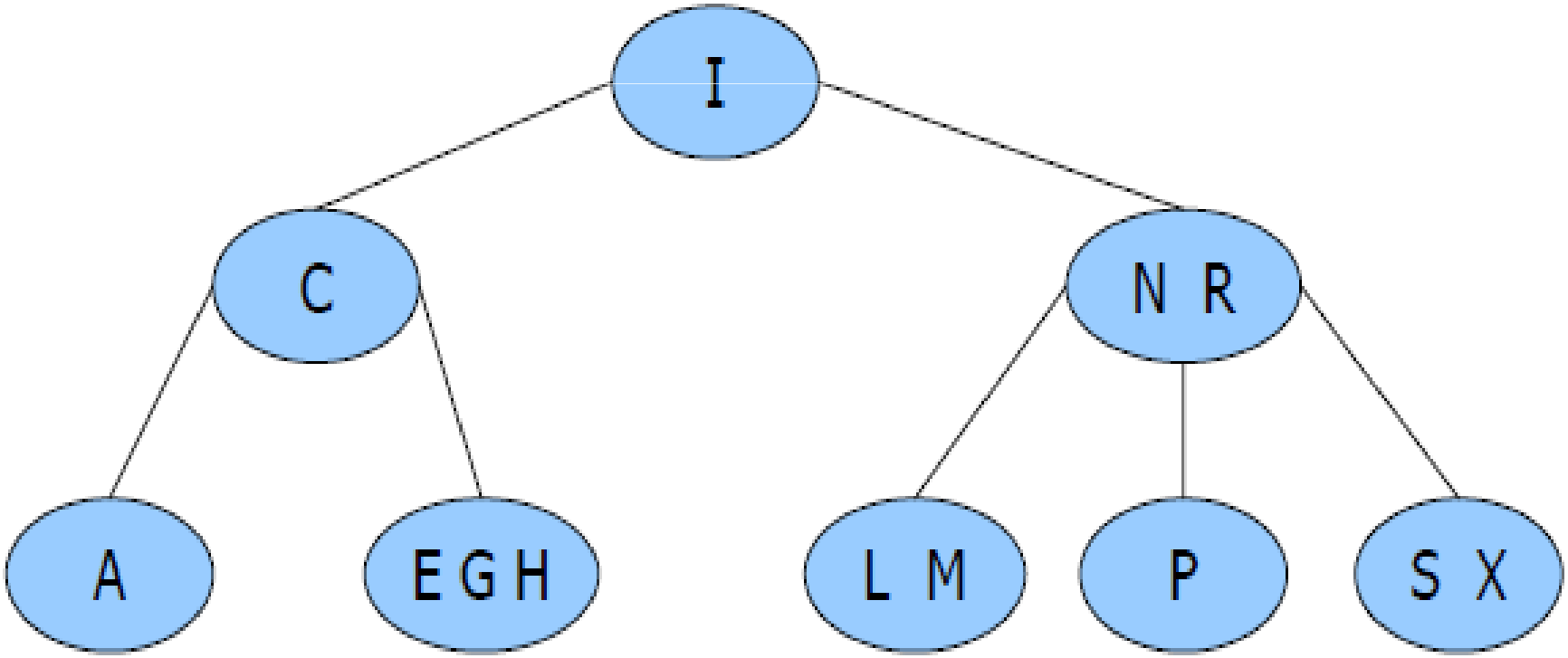
- Prestazioni variabili da:
  - logaritmiche: caso migliore, albero bilanciato
  - lineari: caso peggiore, albero degenere.
- Soluzioni:
  - applicazione periodica di procedure di ribilanciamento
  - imposizione di vincoli sull'albero per
  - limitare lo sbilanciamento.

Alberi di ricerca 2-3-4

Albero vuoto o con 3 tipi di nodi:

- 2-nodi: 1 chiave, sottoalbero sinistro delle chiavi minori, sottoalbero destro delle chiavi maggiori
- 3-nodi: 2 chiavi ordinate, sottoalbero sinistro delle chiavi minori di entrambe le chiavi, sottoalbero centrale delle chiavi comprese tra le due, sottoalbero destro delle chiavi maggiori di entrambe le chiavi
- 4-nodi: 3 chiavi ordinate, 4 sottoalberi con chiavi con valori che stanno negli intervalli di valori definiti dalle 3 chiavi.

Esempio



Alberi 2-3-4 bilanciati

- Si considerano esclusivamente alberi di ricerca 2-3-4 bilanciati:
- Bilanciamento: tutte le foglie hanno uguale distanza dalla radice.

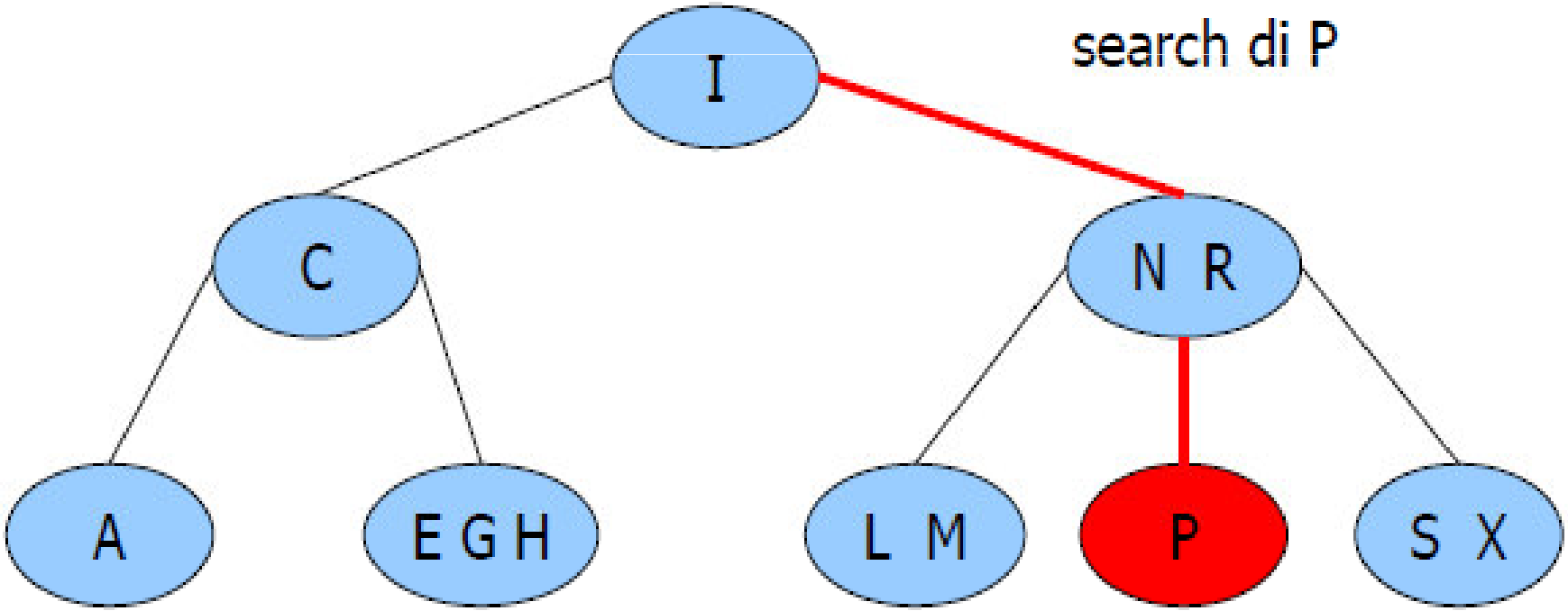
- BST: alberi 2-3-4 non bilanciati formati da soli 2-nodi.

Ricerca di una chiave

Generalizzazione della ricerca nei BST:

- Confronto sequenziale della chiave cercata con le chiavi contenute della radice
- search hit se trovata
- se non trovata, si scende nel sottoalbero che corrisponde all'intervallo di valori che comprende la chiave
- Si ripete (ricorsivamente) la ricerca nel sottoalbero.

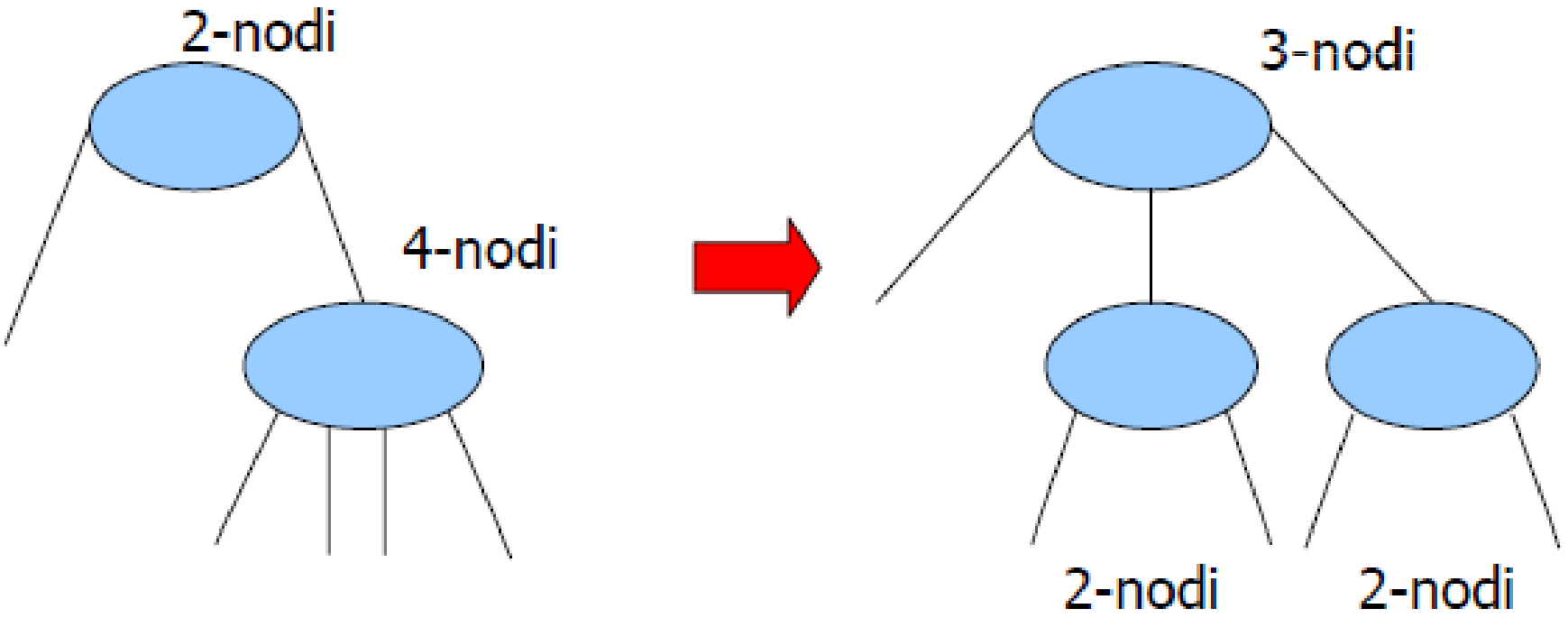
Esempio

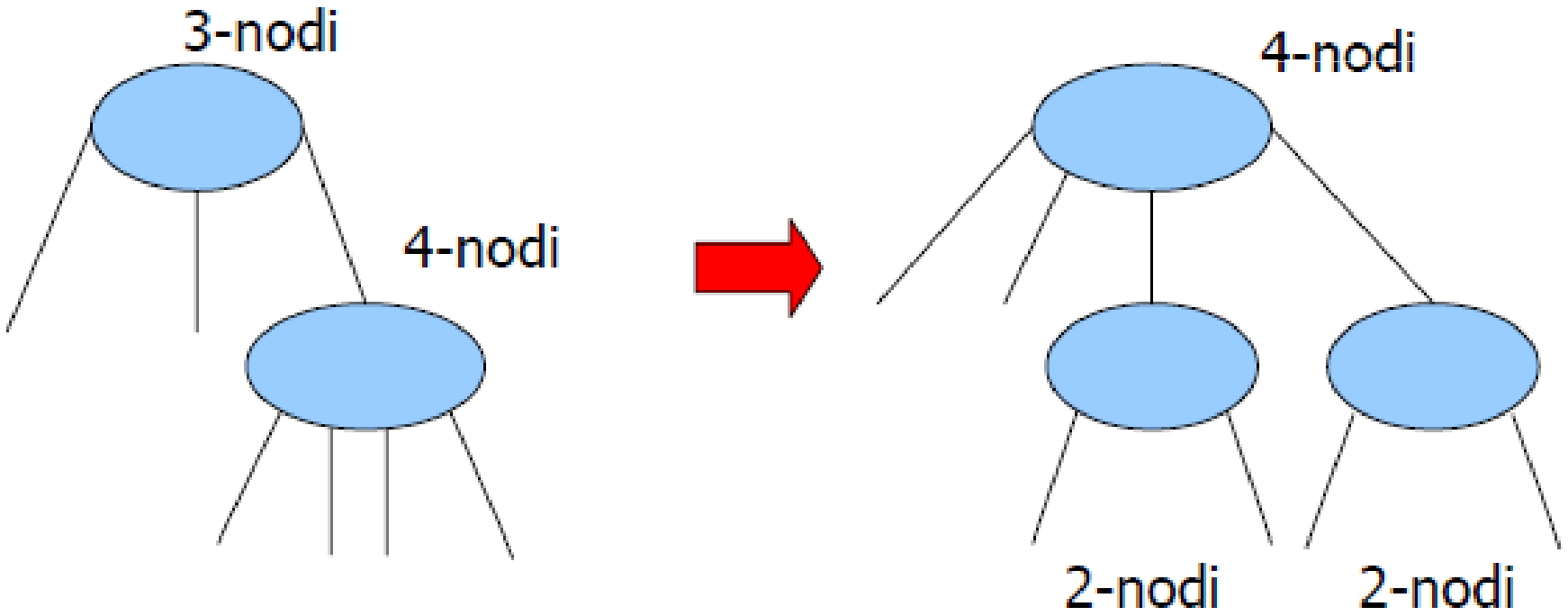


Inserimento top-down

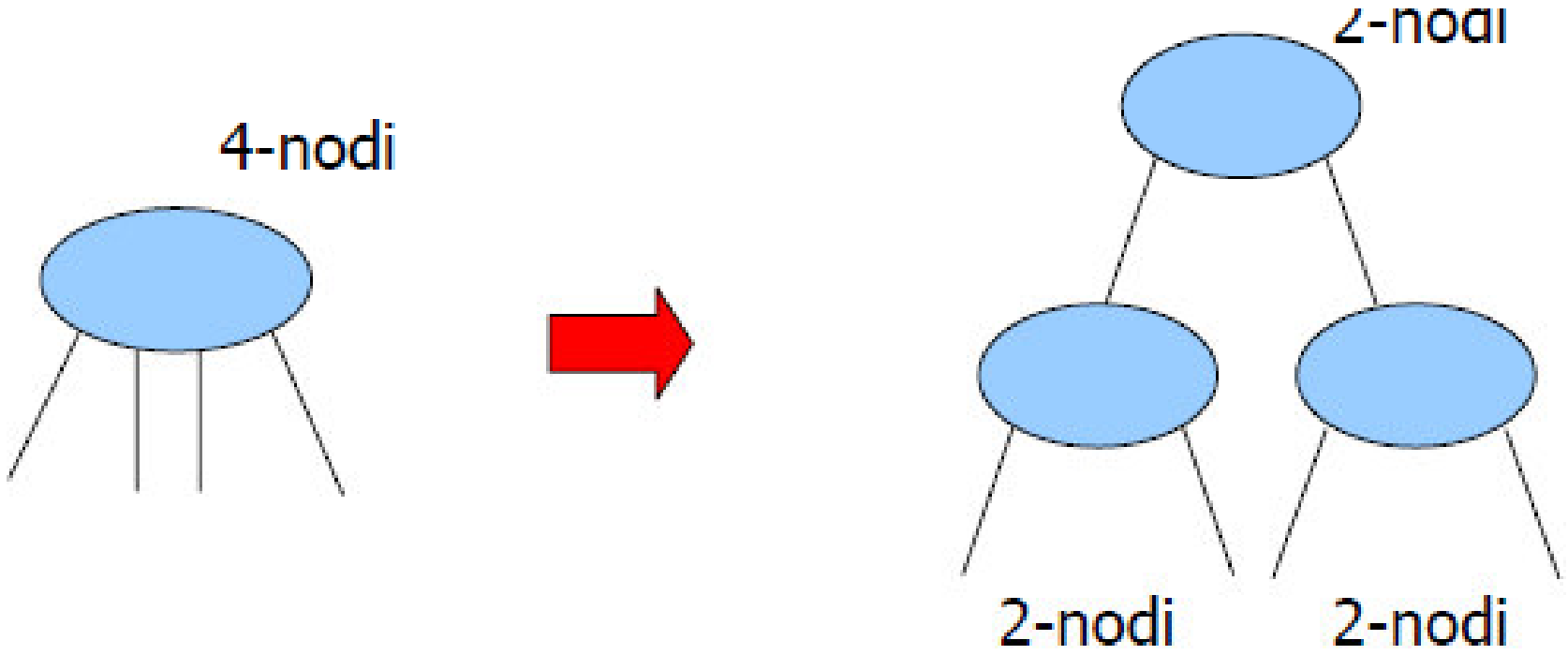
- Ricerca a partire dalla radice per identificare il nodo in cui inserire la chiave:
- se il nodo corrente è un 4-nodo, lo si decompone in 2 2-nodi e si inserisce la chiave di mezzo nel padre (che può essere solo un 2-nodi o un 3-nodi)

Split di un 4-nodo




3-nodi
4-nodi
4-nodi
2-nodi
2-nodi

Split di un 4-nodo radice



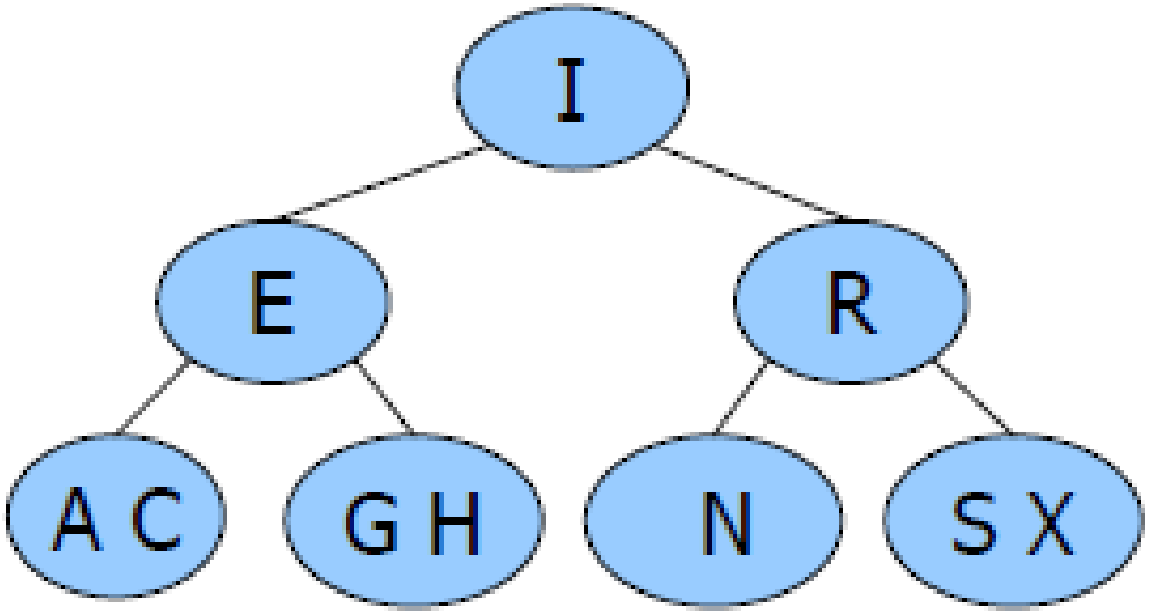
- L'altezza dell'albero cresce di 1.
- L'albero cresce dalla radice verso l'alto.

Al termine della ricerca:

- il nodo foglia identificato non può essere un 4-nodo (sarebbe stato decomposto al passo precedente)
- se il nodo identificato è un 2-nodo, si inserisce ordinatamente la chiave trasformando la foglia in 3-nodo
- se il nodo identificato è un 3-nodo, si inserisce ordinatamente la chiave trasformando la foglia in 4-nodo.

Esempio

- Inserimento in sequenza di ASERCHINGX



Analisi della complessità

- Una ricerca in un albero 2-3-4 bilanciato di N nodi non visita mai più di lgN + 1 nodi
- Un inserimento in un albero 2-3-4 bilanciato di N nodi richiede nel caso peggiore meno di lgN + 1 split.

Alberi red-black (RBtree)

Definizione 1

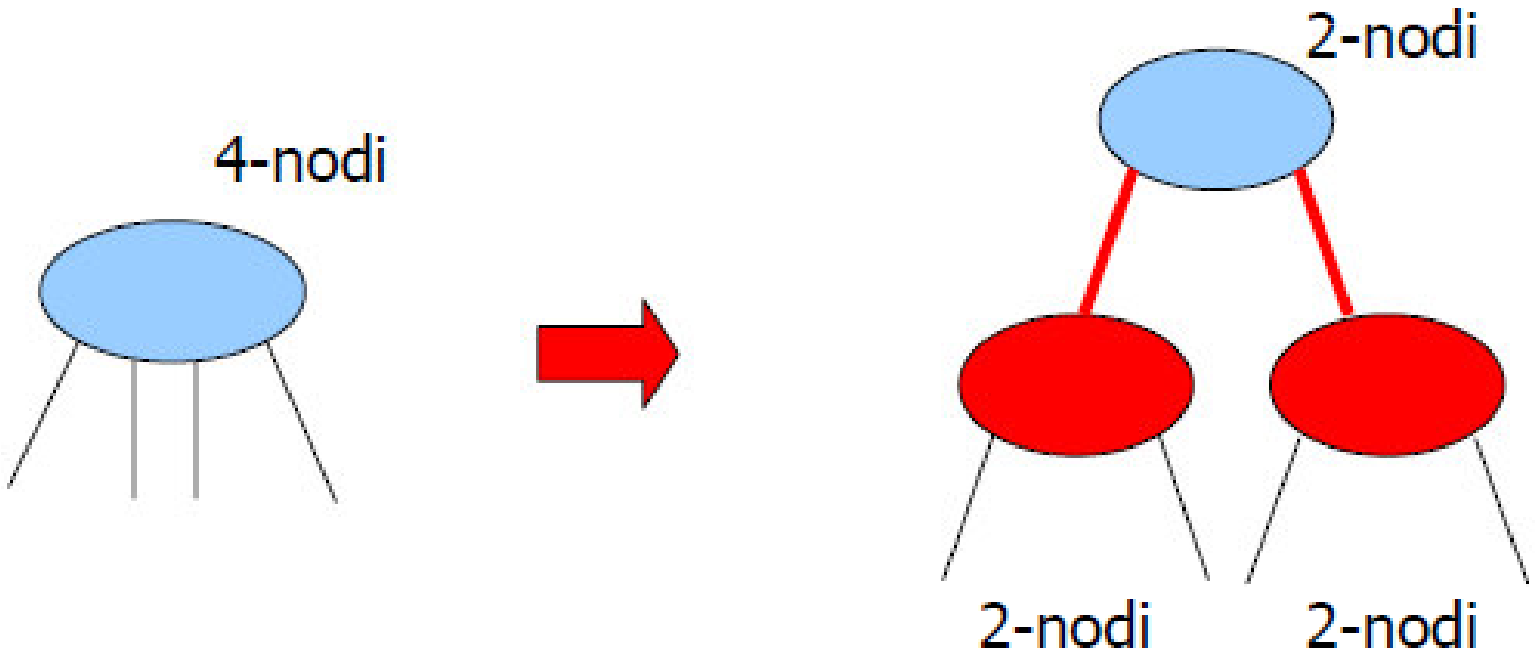
BST in cui:

- ogni nodo è o rosso o nero
- se un nodo è rosso, non può avere figli rossi
- ogni cammino semplice dalla radice a una foglia contiene lo stesso numero di nodi neri

Definizione 2

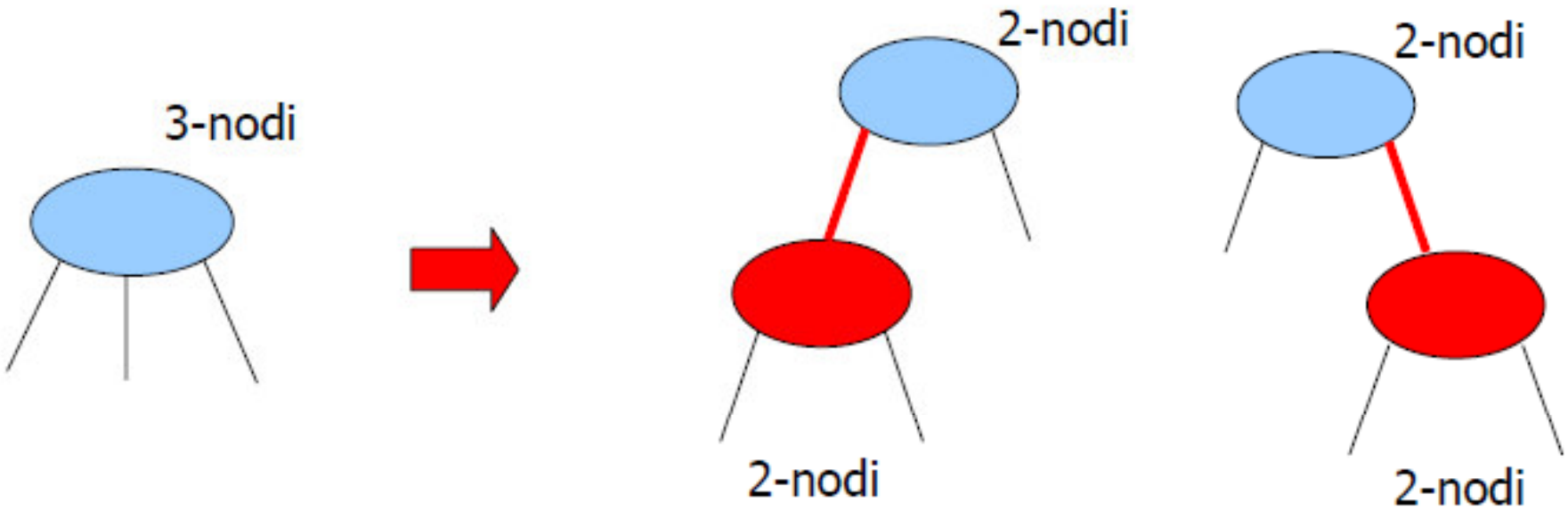
- Rappresentazione degli alberi 2-3-4 come BST con ulteriore bit di informazione per codificare 2-nodi e 3-nodi:
- link rossi che connettono piccoli alberi binari che formano 3-nodi e 4-nodi
- link neri che connettono l'intero albero 2-3-4
- Ogni nodo è raggiunto tramite 1 solo link, quindi colorare i link equivale a colorare i nodi.

Rappresentazione di un 4-nodo

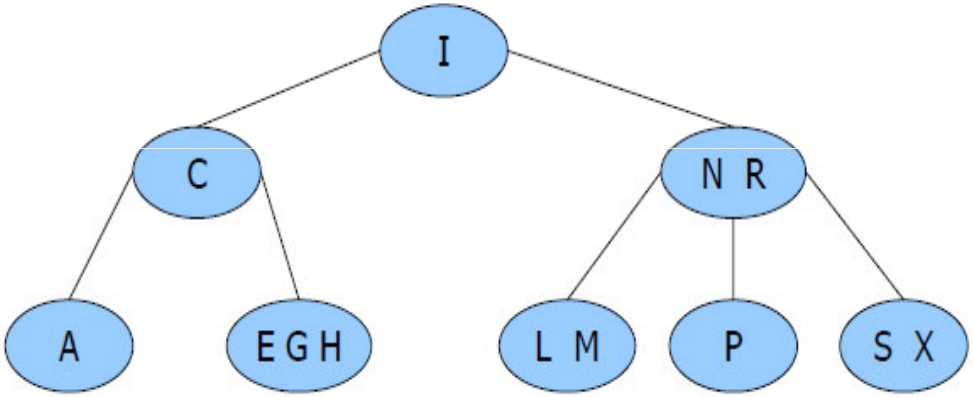


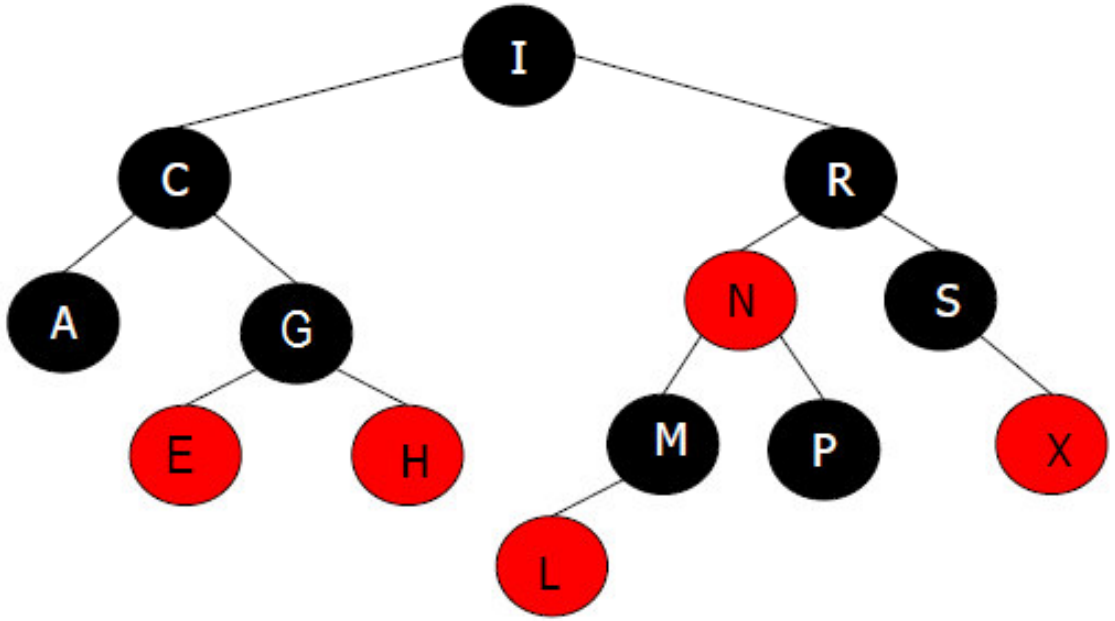
Rappresentazione di un 3-nodo

Due alternative:



Dall'albero 2-3-4 al RBtree





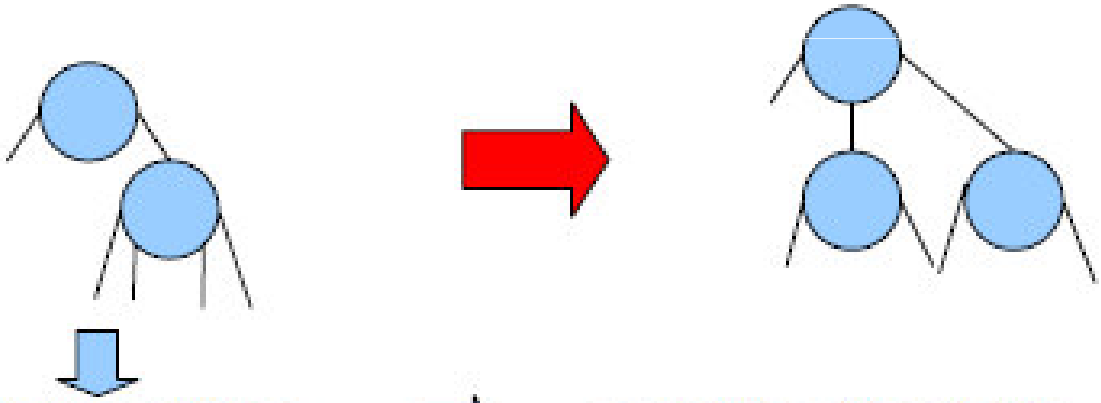
Operazioni su RBtree

- La ricerca è identica a quella nel BST (il colore non influisce)
- L'inserimento deve garantire le proprietà dell'RBtree
- Inserimento top-down: immaginiamo di operare su un albero 2-3-4 implementato tramite un RBtree.

Inserimento top-down

4-nodi figlio di 2-nodi (link DX)

Albero 2-3-4



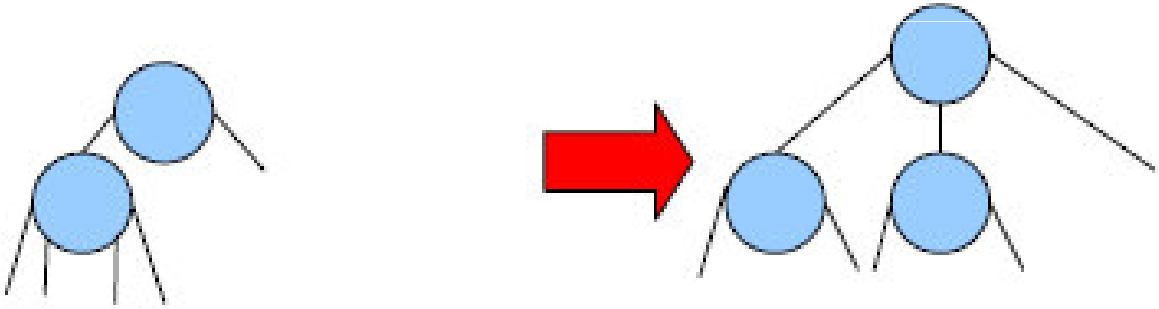
trasformazione

cambio di colore

RB-tree

4-nodi figlio di 2-nodi (link SX)

Albero 2-3-4



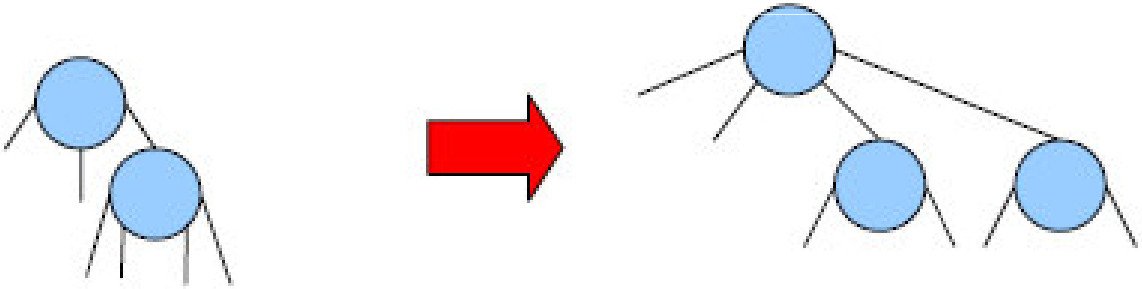
trasformazione

cambio di colore

RB-tree

4-nodi figlio di 3-nodi (link DX)

Albero 2-3-4

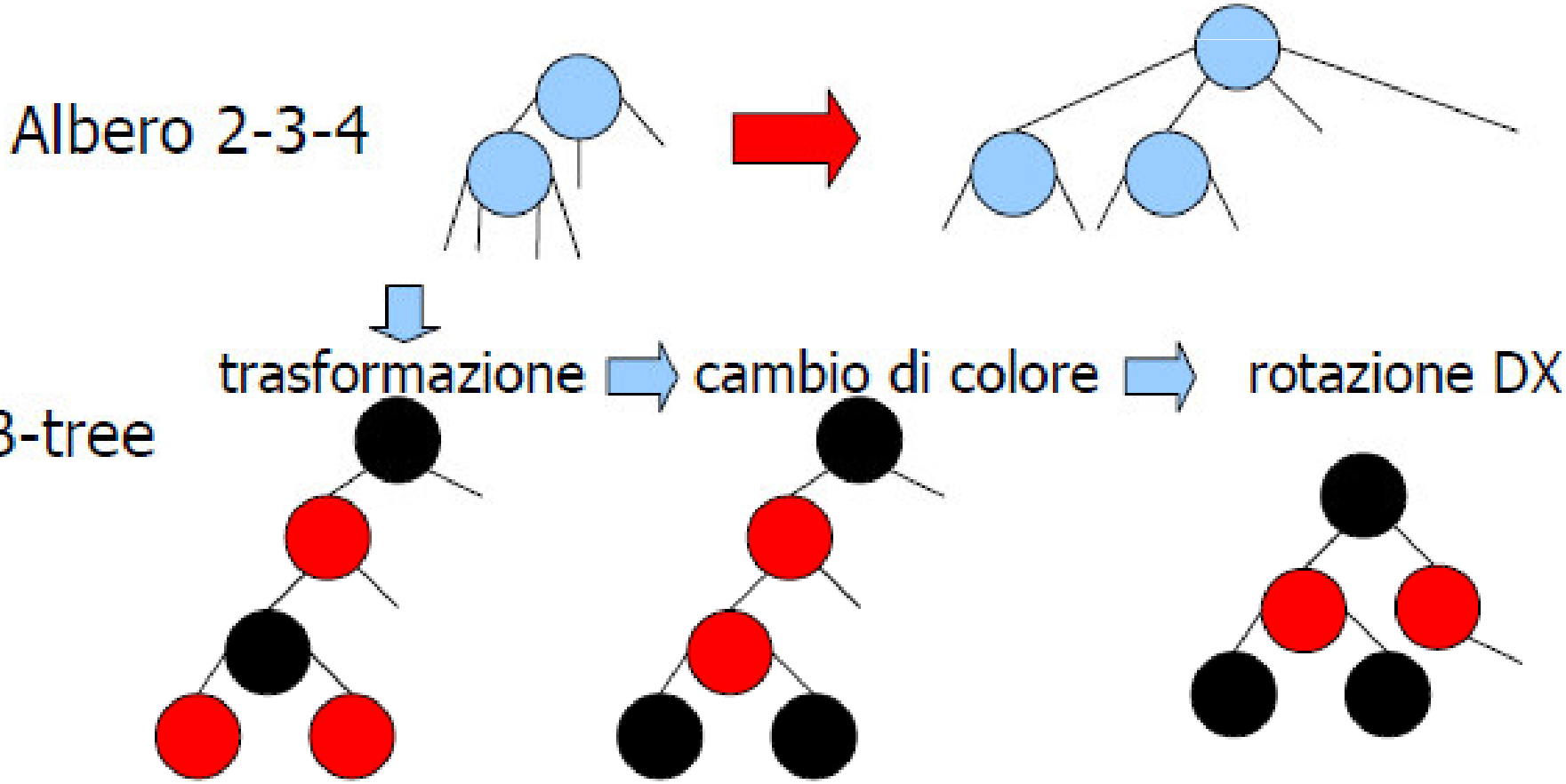


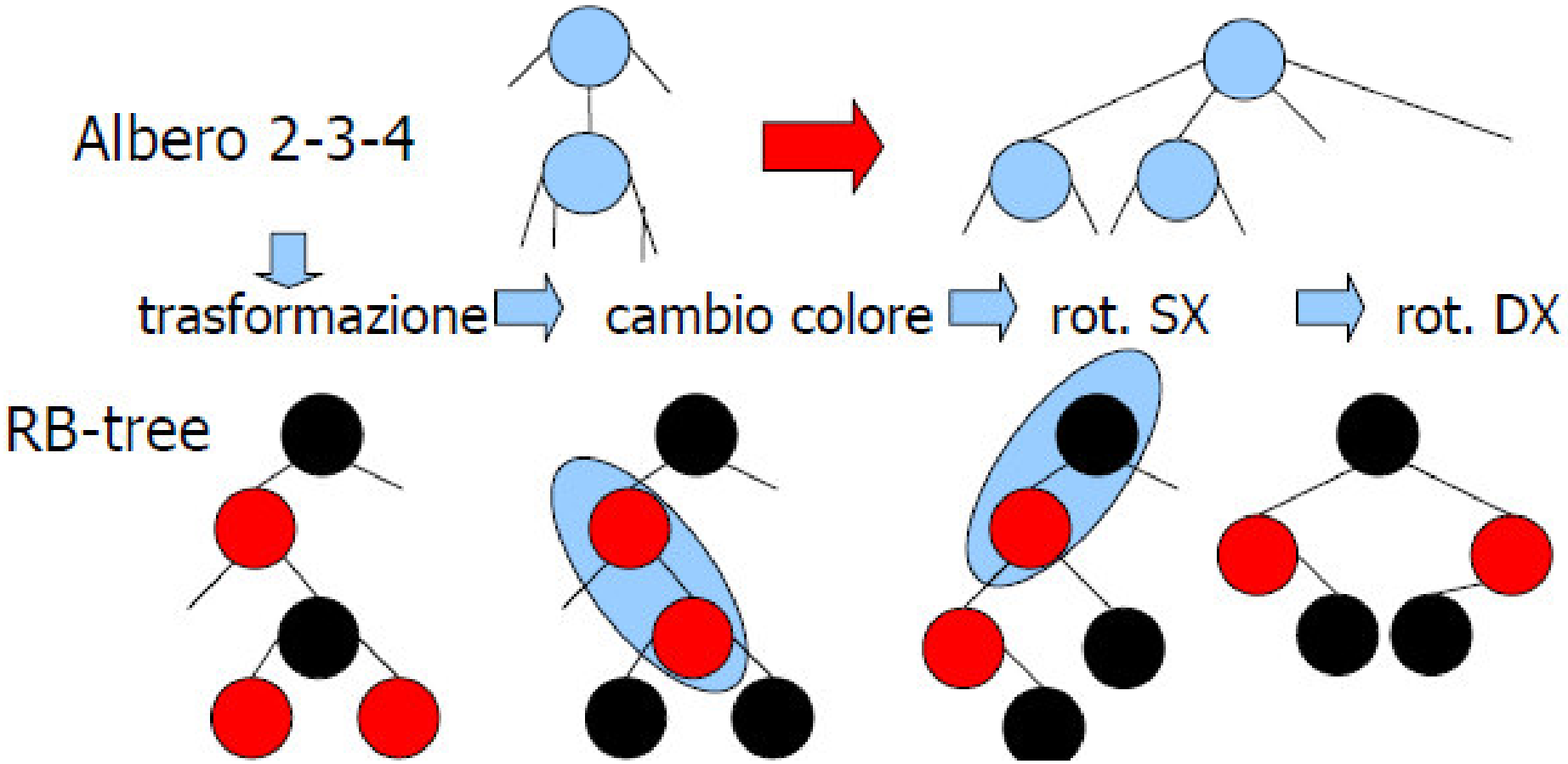
trasformazione

cambio di colore

RB-tree

4-nodi figlio di 3-nodi (link SX)



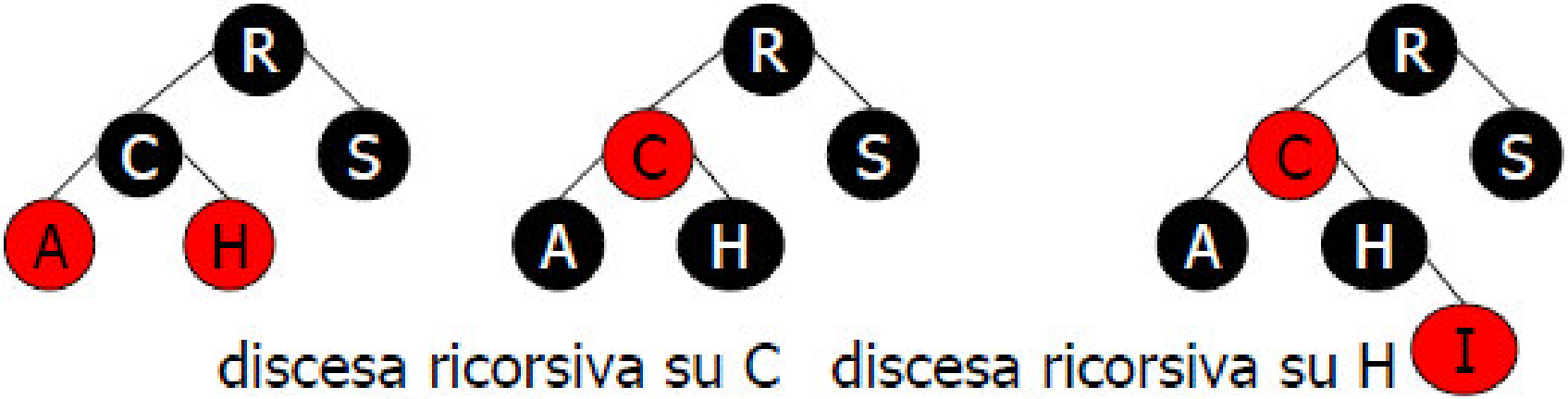

Albero 2-3-4
trasformazione
cambio colore
rot. SX
rot. DX
RB-tree

L’inserimento

- L’inserimento richiede operazioni locali di “ristrutturazione” dell’albero con:
  - cambi di colore
  - ribilanciamento
- scendendo nell’albero si scompongono i 4-nodi, invertendo il colore dei 3 nodi risultanti
- risalendo si eseguono le rotazioni se necessario

Esempio

Inserimento di I

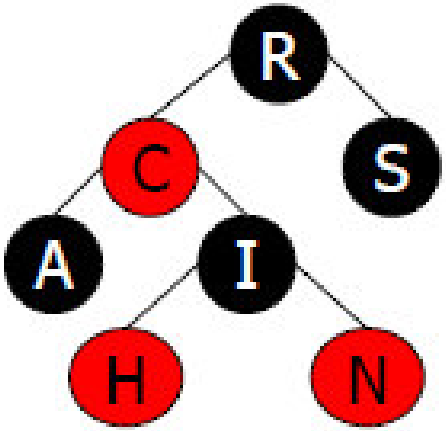


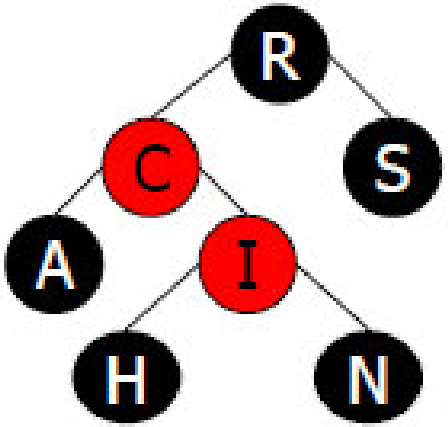
discesa ricorsiva su C
e cambio colore

discesa ricorsiva su H
e creazione di nuovo
nodo rosso

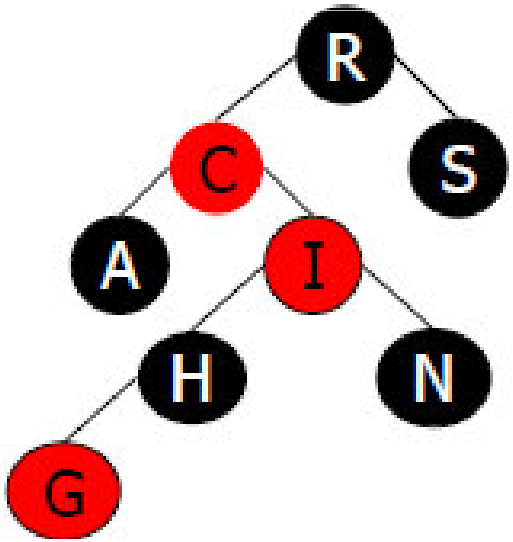
risalita senza rotazioni

Inserimento di G

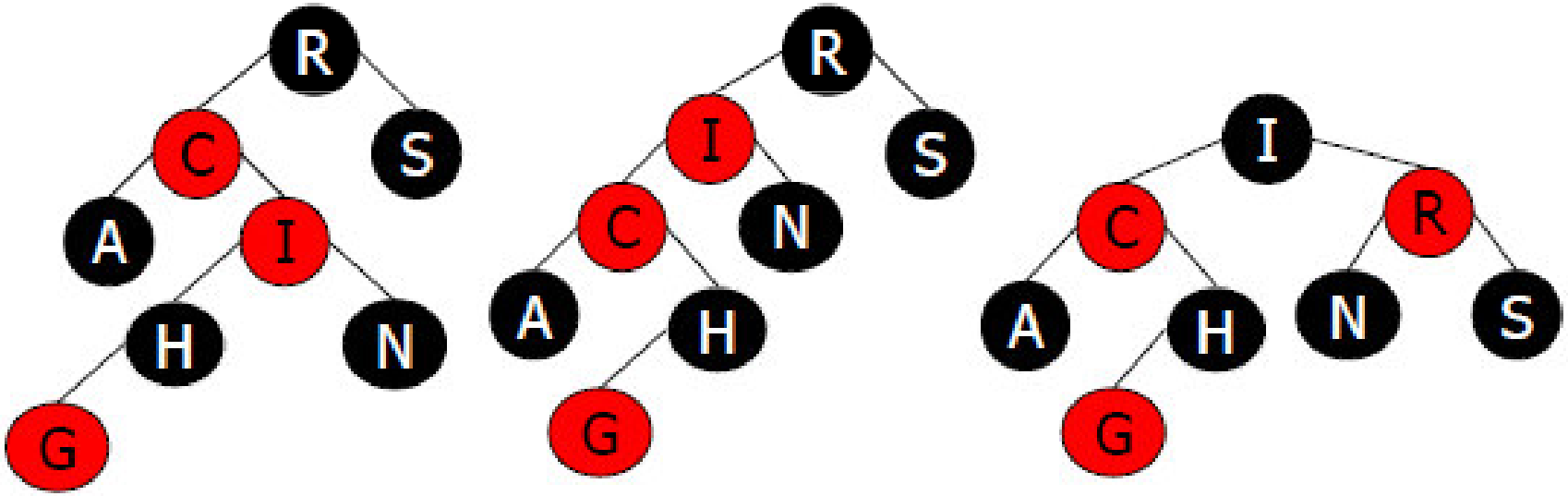




discesa ricorsiva su I
e cambio colore



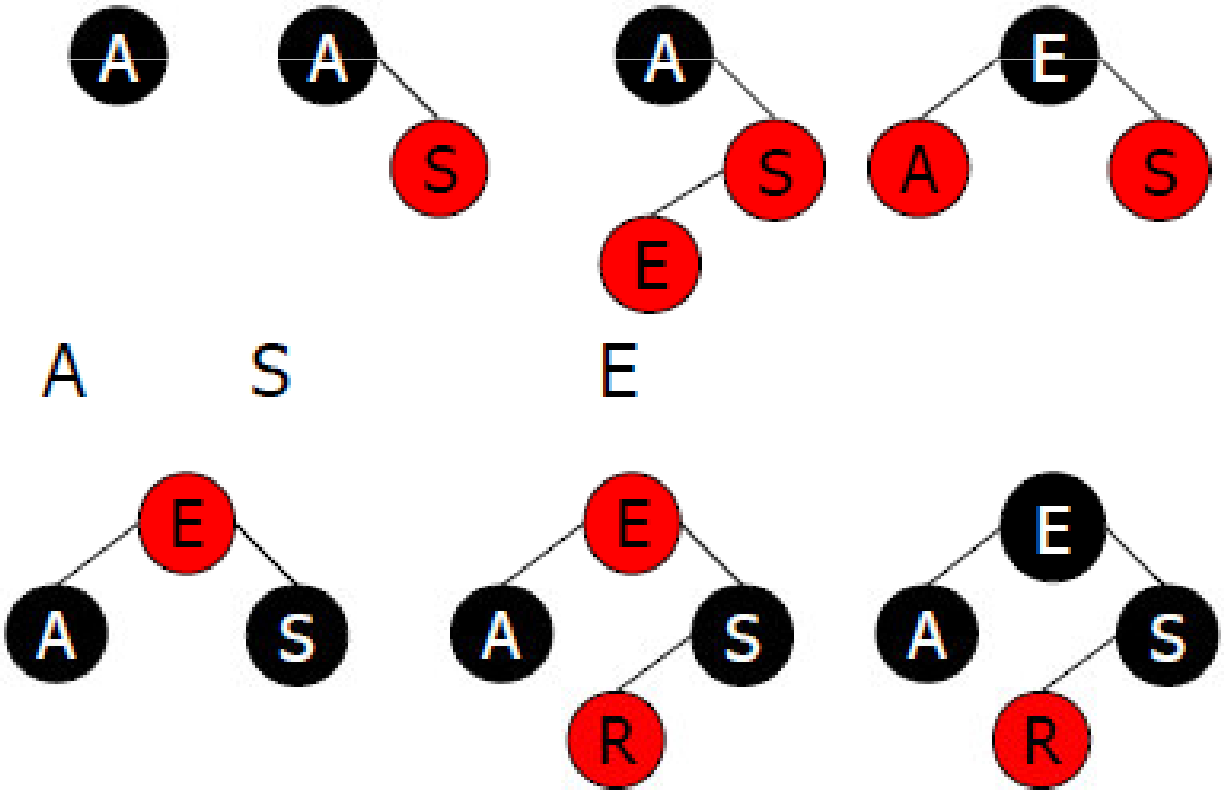
discesa ricorsiva su H
e creazione di nuovo
nodo rosso

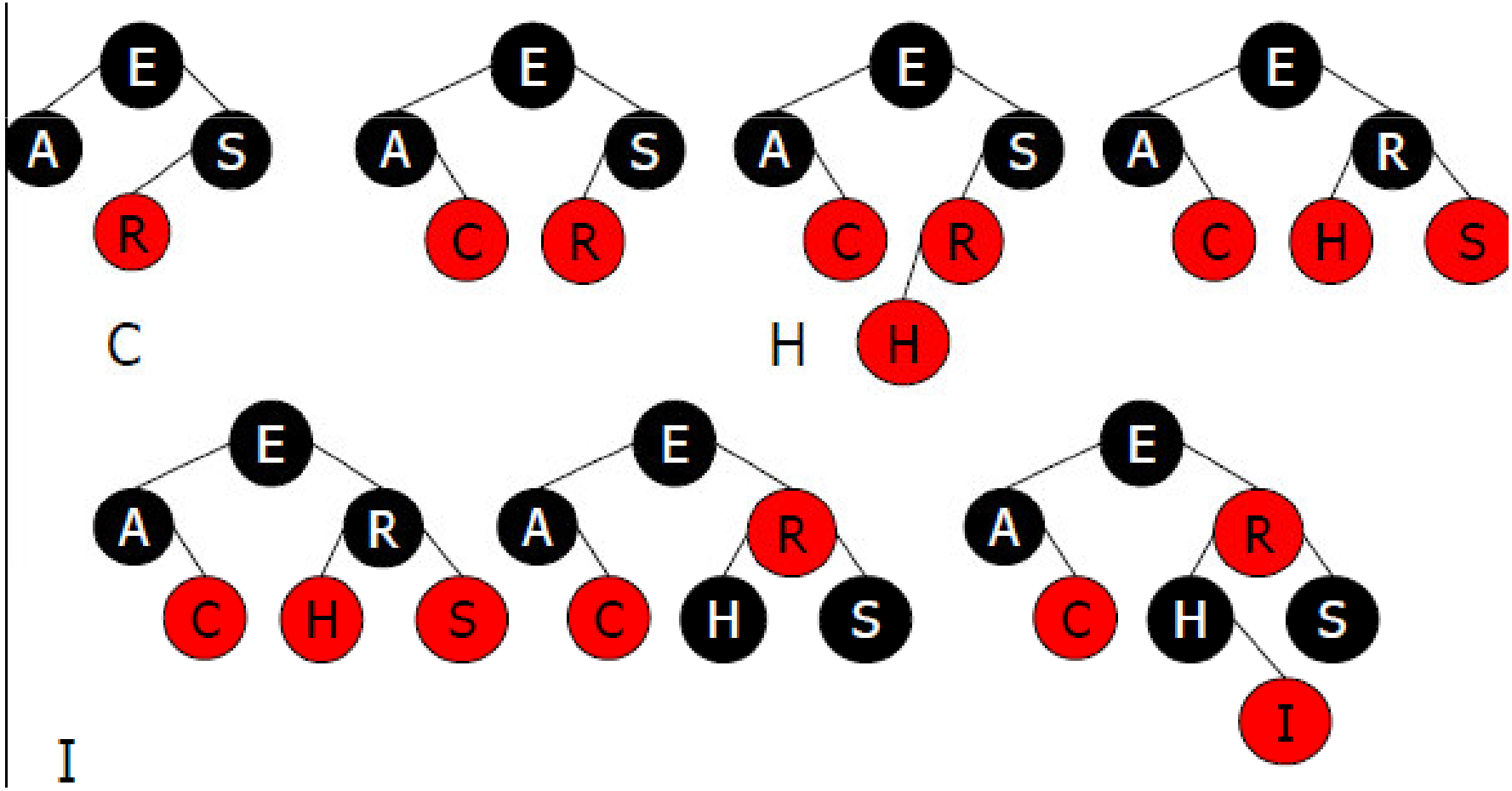


risalita e rotazione
a SX rispetto a C

risalita e rotazione
a DX rispetto a R
cambio colore della radice

Inserimento di A S E R C H I in RB-tree vuoto




E
A
S
R
C
R
E
A
S
C
R
E
A
S
C
R
H
E
A
R
C
H
S
C
H
H
E
A
R
C
H
S
I
E
A
R
C
H
S
E
A
R
C
H
S

- I Rbtree costituiscono l'elemento centrale per la realizzazione di due classi del JCF molto usate:
  - TreeMap
  - TreeSet